Colles de Maths - semaine 12 - MP*1

Julien Allasia - ENS de Lyon

Séries entières

Exercice 1 Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n\, z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0,+\infty[$. On suppose qu'il existe z_0 tel que $|z_0| = R$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_n z_0^n$ converge. Montrer qu'alors la convergence de la série entière est uniforme sur tout ensemble de la forme

$$C_{\theta_0} = \{z_0(1-\rho e^{i\theta}) \in D(0,R) \cup \{z_0\},\ 0 \leqslant \rho \leqslant \rho_0, |\theta| \leqslant \theta_0\}$$

où $0 \leqslant \theta_0 < \pi/2$ et $0 \leqslant \rho < 2R\cos\theta_0$.

Exercice 2 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On suppose que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n\, x^n$ est de rayon au moins 1 et que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} l \in \mathbb{C}$.

1. On suppose que $a_n \geqslant 0$ pour tout n. Montrer que $\sum a_n$ converge et que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = l$.
2. On suppose que $a_n \underset{n\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$. Montrer que $\sum a_n$ converge et que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = l$.

Exercice 3 Développer en série entière en 0 la fonction

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{-x^2/2} \int_0^x e^{t^2/2}\, \mathrm{d}t.$$

Exercice 4 Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales à coefficients positifs qui converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f. Montrer qu'il existe $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que

$$\forall x \in [0,1[,\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n.$$

Exercice 5 Soit $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1[$.
Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n^\alpha\, x^n}{1-x^n}$ converge, et donner un équivalent de sa somme lorsque x tend vers 1.
Indication : On pourra admettre que les propriétés de l'intégrale s'étendent bien aux fonctions réglées sur un segment (c'est-à-dire admettant en tout point une limite à gauche et à droite), y compris l'approximation par les sommes de Riemann.

Exercice 6 Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est analytique, c'est-à-dire développable en série entière en tout point de I ;
(ii) Pour tout $x_0 \in I$, il existe $\eta > 0$ et des constantes $C, r > 0$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |x - x_0| \leqslant \eta \Rightarrow\ |f^{(n)}(x)| \leqslant Cr^n n!.$$

Remarque : Avec la propriété de Borel-Lebesgue, on montre en fait que *(ii)* est aussi équivalent à : pour tout segment $J \subseteq I$, il existe des constantes $C, r > 0$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in J,\ |f^{(n)}(x)| \leqslant Cr^n n!$.

Familles sommables

Exercice 7 Justifier l'existence de et calculer la quantité $\sum_{q=2}^{\infty}(-1)^q\,(\zeta(q)-1)$.

Exercice 8 Justifier l'existence de et calculer, en fonction de γ, la quantité $\sum_{q=2}^{\infty}(-1)^q\,\frac{\zeta(q)-1}{q}$.

Exercice 9 Soit f, g deux fonctions de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)\,g(n/d)$.

On suppose que les séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{f(n)}{n^s}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{g(n)}{n^s}$ sont absolument convergentes. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(f*g)(n)}{n^s}$ est absolument convergente et donner une expression de sa somme.

Fonctions convexes

Exercice 10 Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Montrer que f est convexe si et seulement si

$$\forall x, y \in [0,1],\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Exercice 11 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle qu'il existe $\alpha > 0$ vérifiant $f'' \geq \alpha$. Montrer que f possède un unique minimum local et global. Qu'en est-il si on suppose seulement que $f'' > 0$?